Dinámica Adaptativa: Modelo EDP de Evolución y Selección Natural

Estudiantes: Juan Bravo, Valentina Gómez y Francisco Muñoz

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Motivación

La observación de la naturaleza ha sido fuente de inspiración para científicos y científicas desde antes de la ciencia misma fuera formalizada, y uno de sus aspectos más fascinantes es su basta diversidad, por lo que modelar matemáticamente la diversificación de las especies se transforma en un viejo anhelo. Desde un punto de vista pragmático, entender mejor la interacción entre especies puede proporcionar poderosas herramientas al entendimiento de la ecología evolutiva, tan importante ahora que muchos ecosistemas se ven amenazados.

Objetivos

(1) Entender el modelado de la evolución de las especies mediante las ecuaciones de Perthame.

(2) Implementar y resolver dichas ecuaciones mediante el método de diferencias finitas.

(3) Encontrar correlaciones entre las variables involucradas.

(4) Desarrollar un nuevo modelo que involucre más de una especie.

Variables Implicadas

- y, x, z (Rasgo del recurso y las especies)
- $R(t,y), u(t,x), v(t,z)$ (Distribución del recurso y las especies)
- $r_u(x), r_v(z)$ (Tasa de crecimiento de las especies)
- $R_{\text{in}}(y)$ (Tasa de suministro del recurso)
- $m_u(x), m_v(z)$ (Mortalidad de las especies consumidoras)
- $m_R(y)$ (Tasa de decaimiento del recursos)
- $K_{u,R}(x,y)$ (Tasa de consumo del recurso y por individuos del rasgo x)
- $K_{v,u}(z,x)$ (Tasa de consumo de individuos del rasgo x por individuos del rasgo z)
- $\varepsilon_u, \varepsilon_v$ (Tasa de mutación de las especies)

Primera Ecuación de Perthame

El modelo de la Primera Ecuación de Perthame es:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = u(t,x)(-m_u(x) + r_u(x)F_u(t,x)) + \varepsilon_u \Delta u(t,x) \\ \partial_t R(t,y) = -m_R(y)R(t,y) + R_{\text{in}}(y) - R(t,y)G_R(t,y) \\ u(0,x) = u^0(x) \geq 0 \qquad R(0,y) = R^0(y) \geq 0 \end{cases}$$

Donde:

$$F_u(t,x) = \int K_{u,R}(x,y)R(t,y)dy, \quad G_R(t,y) = \int r_u(x)K_{u,R}(x,y)u(t,x)dx$$

Segunda Ecuación de Perthame

Tomando la aproximación cuasi-estática de la dinámica de recursos, se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = u(t,x)(-m_u(x) + r_u(x)F_u(t,x)) + \varepsilon_u \Delta u(t,x) \\ R(t,y) = \frac{R_{\text{in}}(y)}{m_R(y) + G_R(t,y)} \\ u(0,x) = u^0(x) \geq 0 \qquad R(0,y) = R^0(y) \geq 0 \end{cases}$$

Donde F_u y G_R se definieron anteriormente.

Nueva Formulación

Asumiendo que la especie u consume el recurso R, mientras que la especie v consume la especie u, se plantea el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \partial_t R(t,y) = -m_R(y)R(t,y) + R_{\text{in}}(y) - R(t,y)G_R(t,y) \\ \partial_t u(t,x) = u(t,x)(-m_u(x) + r_u(x)F_u(t,x) - G_u(t,x)) + \varepsilon_u \Delta u(t,x) \\ \partial_t v(t,z) = v(t,z)(-m_v(z) + r_v(z)F_v(t,z)) + \varepsilon_v \Delta v(t,x) \\ v(0,z) = v^0(z) \geq 0 \quad u(0,x) = u^0(x) \geq 0 \quad R(0,y) = R^0(y) \geq 0 \end{cases}$$

Donde F_u y G_R son los mismos definidos anteriormente. Además:

$$F_v(t,x) = \int K_{v,u}(z,x)u(t,x)dx, \quad G_u(t,y) = \int r_v(z)K_{v,u}(z,x)v(t,z)dz$$

Esquema para u

Definiendo $A(t,x) := -m_u(x) + r_u(x)F_u(t,x)$, la ecuación de u se puede escribir como:

$$\partial_t u(t,x) - \varepsilon_u \Delta u(t,x) = A(t,x)u(t,x)$$

Del cuál se puede deducir el siguiente esquema θ-implícito:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\varepsilon_u \frac{\Delta t}{h^2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - (1-\theta)\varepsilon_u \frac{\Delta t}{h^2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = \theta \cdot A_j^{n+1}u_j^{n+1} + (1-\theta)\cdot A_j^n u_j^n$$

Esquema para R

El esquema para resolver la primera ecuación de Perthame para R es:

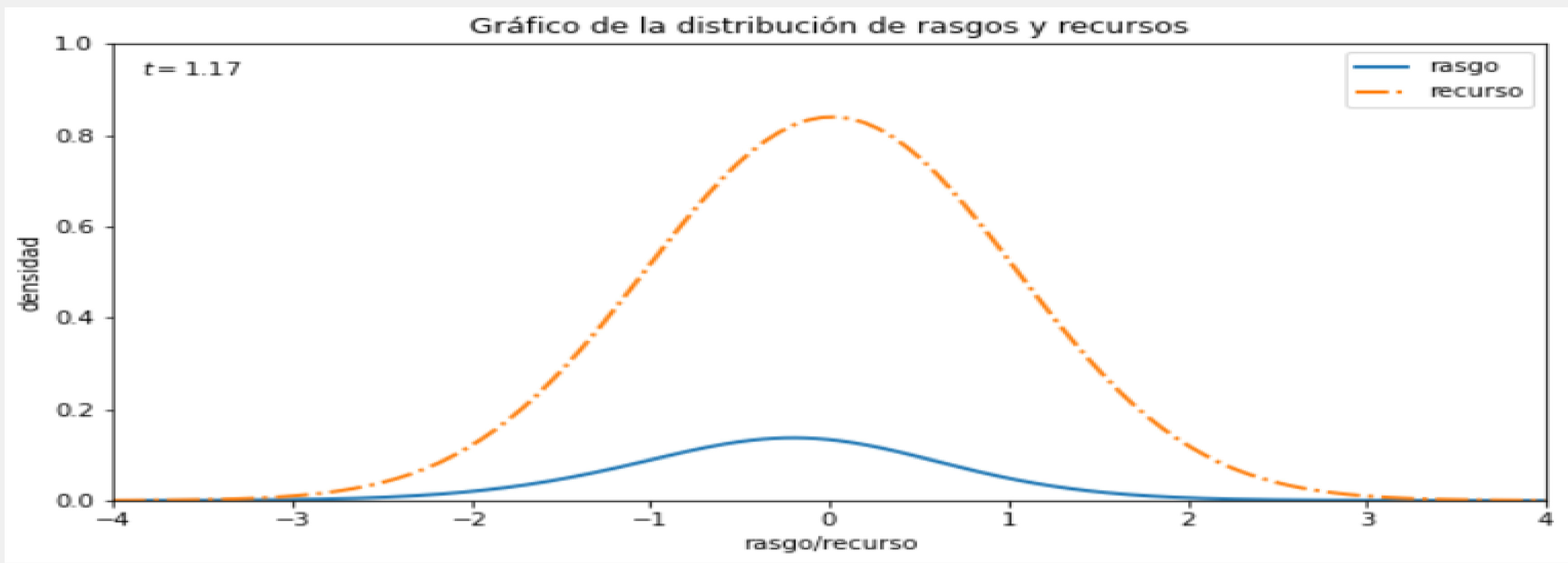
$$\frac{R_k^{n+1} - R_k^n}{\Delta t} = -m_{R,k}R_k^n + R_{\text{in},k} - R_k^n G_{R,k}^n$$

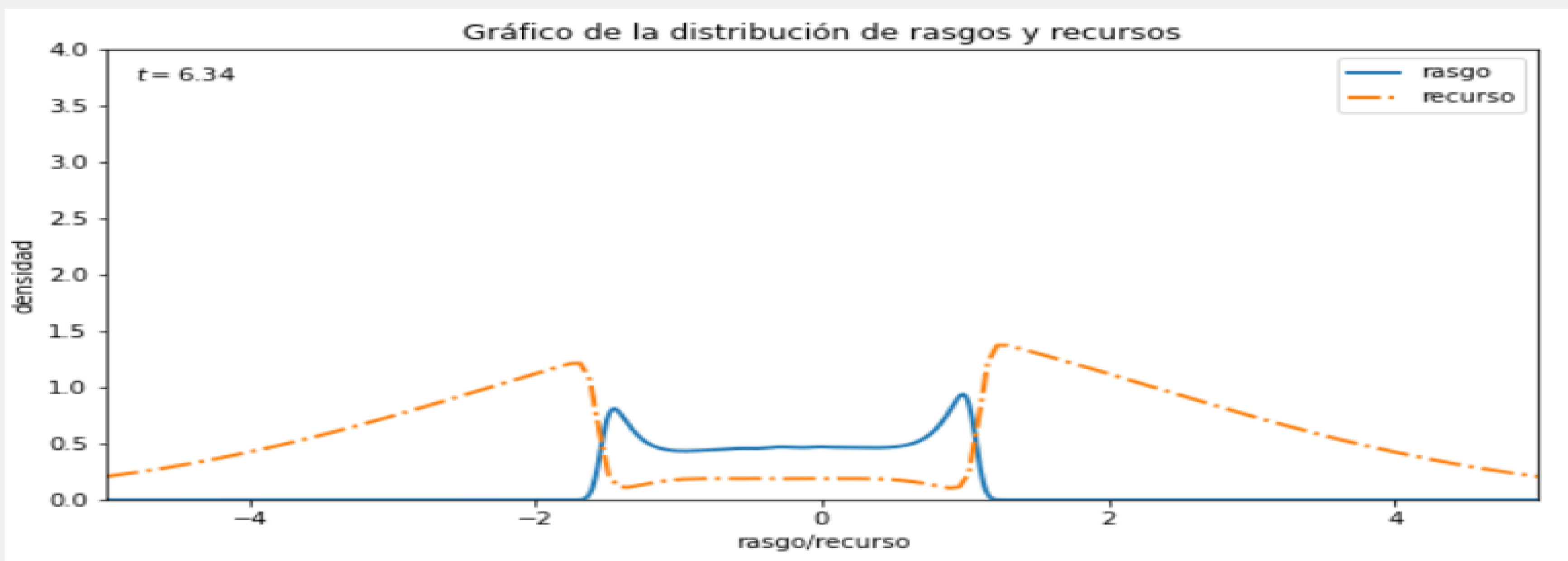
Y el esquema para la segunda Ecuación para R es:

$$R_k^{n+1} = \frac{R_{\text{in}k}}{m_{R,k} + G_{R,k}^{n+1}}$$

Resultados: Monomosfismo y Dimorfismo

A continuación se pueden observar los resultados en donde el rasgo de la especie converge en un único rasgo (monomorfismo) y en dos rasgos (dimorfismo):





Repositorio GitHub

Para más detalles, se puede visitar el repositorio del proyecto escaneando el código QR. Allí se puede encontrar el código fuente, como también las animaciones de los resultados.

Código QR del Repositorio

Referencias

1. S. Mirrahimi y col., Journal of mathematical biology **64**, 1189-1223 (2012).
2. B. Perthame, Transport equations in biology (Springer Science & Business Media, 2006).